

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Андрей Драгомирович Хлутков  
Должность: директор  
Дата подписания: 26.03.2026 21:28:04  
Уникальный программный ключ:  
880f7c07c583b07b775f6604a630281b13ca9fd2

Приложение 4  
к образовательной программе

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения»  
(индекс, наименование дисциплины в соответствии с учебным планом)

38.03.05 Бизнес-информатика  
(код, наименование направления подготовки)

Бизнес-аналитика  
(наименование образовательной программы)

очная форма обучения  
(форма обучения)

Год набора – 2025

Санкт-Петербург

**Автор(ы)-составитель(и) РПД:**

Клоков Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры бизнес-информатики

Моторина Ирина Юрьевна, кандидат экономических наук, доцент кафедры бизнес-информатики

**Заведующий кафедрой бизнес-информатики:**

Наумов Владимир Николаевич доктор военных наук, профессор

Рабочая программа дисциплины Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения» одобрена на заседании кафедры бизнес-информатики СЗИУ РАНХиГС.

протокол № 10 от «27» августа 2025 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы
2. Объем и место дисциплины в структуре образовательной программы
3. Содержание и структура дисциплины
4. Типы оценочных материалов, показатели, критерии, шкалы оценивания
5. Формы аттестации и типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся
6. Формы промежуточной аттестации по дисциплине, типы оценочных материалов, показатели, критерии, шкалы оценивания
7. Методические материалы по освоению дисциплины
8. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»
9. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы**

Дисциплина Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения» обеспечивает формирование у обучающихся следующих профессиональных компетенций:

<b>ОТФ/ТФ и реквизиты ПС (при наличии)</b>	<b>Код компетенции</b>	<b>Наименование компетенции</b>	<b>Код индикатора достижения компетенций</b>	<b>Наименование индикатора достижения компетенций</b>	<b>Образовательный результат</b>
	ОПК -4	Способен понимать принципы работы информационных технологий; использовать информацию, методы и программные средства ее сбора, обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений	ОПК-4.1	Способен использовать математические методы, математические модели и программные средства для решения задач сбора, обработки и анализа информации	<p><b>ОПК-4.1 3-1</b>  <b>Знает:</b>                      основные типы дифференциальных и разностных уравнений, методы их решения и условия применимости в экономических и управленческих задачах  <b>ОПК-4.1 У-1</b>  <b>Умеет:</b>                      строить и решать математические модели экономических процессов с использованием дифференциальных и разностных уравнений</p>
			ОПК-4.2	Способен использовать при	<p><b>ОПК-4.2 3-1</b>  <b>Знает</b>                      логику построения и анализа</p>

				<p>решении практических задач методы и программные средства сбора информации, ее обработки и анализа для информационно-аналитической поддержки принятия управленческих решений</p>	<p>моделей динамических систем на основе дифференциальных и разностных уравнений <b>ОПК-4.2 У-1</b> <b>Умеет</b> интерпретировать результаты качественного и количественного анализа решений дифференциальных и разностных уравнений в контексте экономических и управленческих задач</p>
--	--	--	--	--	---

## 2. Объем и место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Общий объем дисциплины:

3,00 з.е., 108 ак.час

Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий: 40 ак. час на контактную работу с преподавателем, из них 16 ак.час на лекции и 24 ак.час на практические занятия, 68 ак. час на самостоятельную работу обучающихся.

Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения» реализуется в 3-м семестре 2-го курса. Преподавание дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» опирается на дисциплины «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

### 3. Содержание и структура дисциплины (модуля)

#### 3.1. Структура дисциплины (модуля)

Очная форма обучения

№ п/п	Наименование тем и (или) разделов	ВСЕГО	Объем дисциплины, ак.час											Форма текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации	
			Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий								Самостоятельная работа				
			Период теоретического обучения						Период промежуточной аттестации (сессия)		СРкр	СРэк	СР		
			Занятия лекционного типа		Занятия семинарского типа		ИК	КСР	КЭ	Кат тэк					К о н т р о л ь
			Л	ВЛ	ЛР	ПЗ									
Тема 1.	Дифференциальные уравнения 1-го порядка (ДУ-1).	8	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	8	Контрольная работа, Письменный опрос	
Тема 2.	Дифференциальные уравнения высших порядков.	8	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	8	Контрольная работа, Письменный опрос	
Тема 3.	Системы дифференциальных уравнений	8	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	8	Контрольная работа	
Тема 4.	Качественные методы теории дифференциальных уравнений	10	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	8	Контрольная работа, Письменный опрос	

Тема 5.	Примеры дифференциальных динамических моделей	8	1			2							7	Тестирование, Письменный опрос
Тема 6.	Разностные уравнения	10	3			4							10	Тестирование, Контрольная работа
Тема 7.	Системы линейных разностных уравнений.	10	2			3							10	Тестирование, Контрольная работа
Тема 8.	Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.	10	2			3							9	Тестирование
Промежуточная аттестация														Зачет
<b>Итого</b>		108	16	0	0	24	0	0	0	0	0	0	68	

*Используемые сокращения:*

Л – лекции - занятия, предусматривающие преимущественную передачу учебной информации обучающимся педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях,).

ВЛ – видео лекции.

ЛР – лабораторные работы.

ПЗ – практические занятия (за исключением лабораторных работ).

ИК – индивидуальные консультации.

КСР – контроль самостоятельной работы

КЭ – консультации перед экзаменом

Каттэк – контактная работа на аттестацию в период экзаменационных сессий

СРкр – самостоятельная работа на подготовку курсовой работы/ курсового проекта.

СРэк – самостоятельная работа на подготовку к экзамену.

СР – самостоятельная работа в семестре на подготовку к учебным занятиям.

### 3.2. Содержание дисциплины

#### **Тема 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка (ДУ-1). ОПК-4.1.**

Предмет учебной дисциплины. Понятие динамической системы и обыкновенного дифференциального уравнения. Определение решения обыкновенного дифференциального уравнения. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Задачи Коши. Геометрическая интерпретация решения обыкновенного дифференциального уравнения. Фазовое пространство, векторное поле скоростей изменения состояния. Расширенное фазовое пространство. ДУ-1 с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнение Я.Бернулли. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Примеры динамических систем, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка: накопление капитала, инфляция, размножение бактерий, распад радиоактивного вещества, распространение эпидемий и наркомании, простейшая модель народонаселения.

#### **Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков. ОПК-4.1.**

Некоторые типы ДУ  $n$ -го порядка, допускающие понижение порядка.

Общие сведения о линейных уравнениях высшего порядка. Линейные однородные уравнения высшего порядка. Линейные однородные уравнения 2-го порядка. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Геометрическая интерпретация решения однородного дифференциального уравнения второго порядка на фазовой плоскости. Фазовые портреты дифференциального уравнения второго порядка: седло, узел, фокус. Понятие устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Достаточное условие устойчивости положения равновесия. Линейные неоднородные уравнения  $n$ -го порядка. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Линейные неоднородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами (метод неопределенных коэффициентов). Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Амплитудочастотная и фазочастотная характеристика. Резонанс.

#### **Тема 3. Системы дифференциальных уравнений. ОПК-4.1, ОПК-4.2.**

Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Интегрирование нормальной СДУ сведением к одному уравнению высшего порядка. Метод исключения. Решение систем дифференциальных

уравнений в математических пакетах MAPLE, MATLAB, MATHCAD.

**Тема 4. Качественные методы теории дифференциальных уравнений. ОПК-4.2.**

Положения равновесия динамических систем. Понятие устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Диссипативные и консервативные системы. Бифуркация положений равновесия динамических систем. Классификация бифуркаций. Элементы теории катастроф. Примеры использования теории катастроф: модель рыболовства, модель «утечки мозгов».

**Тема 5. Примеры дифференциальных динамических моделей. ОПК-4.2.**

Динамические модели Кейнса. Неоклассическая модель роста. Модель Солоу. Модель динамики производства с нелинейными производственными функциями.

**Тема 6. Разностные уравнения. ОПК-4.1, ОПК-4.2.**

Определение разностного уравнения. Дискретное дифференцирование. Лагирование. Примеры решения разностных уравнений. Решение разностных уравнений с помощью пакетов математического моделирования.

**Тема 7. Системы линейных разностных уравнений. ОПК-4.1, ОПК-4.2.**

Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия). Решение подстановкой. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.

**Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений. ОПК-4.2.**

Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений.

**4. Типы оценочных материалов, показатели и критерии оценивания**

4.1. Оценочные материалы по дисциплине Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения» входят в состав оценочных материалов по образовательной программе. Совокупность оценочных материалов по всем

дисциплинам (модулям) образовательной программы составляют фонд оценочных средств (далее – ФОС). ФОС используется при проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с целью оценивания достижения обучающимися планируемых результатов обучения.

4.2. ФОС разработан как комплекс проверочных заданий различного типа и уровня сложности, включает критерии и шкалы оценивания, а также «ключи» правильных ответов. ФОС формируется как отдельный документ и хранится в электронном виде, доступ к ФОС предоставлен ограниченному кругу лиц.

4.3. Для самостоятельной работы обучающихся при подготовке к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации в рабочих программах дисциплин размещены типовые проверочные задания закрытого типов.

Задания закрытого типа — это тестовые задания, в которых каждый вопрос сопровождается готовыми вариантами ответов, из которых необходимо выбрать один или несколько правильных.

Задания комбинированного типа – это тестовые задания, в которых каждый вопрос сопровождается готовыми вариантами ответов, из которых необходимо выбрать один или несколько правильных и обосновать свой выбор.

Задания открытого типа — это задания, в которых на каждый вопрос должен быть предложен развернутый обоснованный ответ.

В зависимости от типа задания рекомендованы определенная последовательность выполнения и система оценивания выполнения заданий.

#### 4.4. Типы заданий, сценарии выполнения, критерии оценивания

ТИП ЗАДАНИЯ	ИНСТРУКЦИЯ	СЦЕНАРИИ ВЫПОЛНЕНИЯ	КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ
Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких предложенных вариантов	Прочитайте текст, выберите правильный ответ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.</li> <li>2. Внимательно прочитать предложенные варианты-ты ответа.</li> <li>3. Выбрать один верный ответ.</li> <li>4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или В).</li> </ol>	Ответ считается верным, если правильно указана цифра или буква
Задание закрытого типа на установление соответствия	Прочитайте текст и установите соответствие	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидаются пары элементов.</li> <li>2. Внимательно прочитать оба списка: список 1 – вопросы, утверждения, факты, понятия и т.д.; список 2 – утверждения, свойства объектов и т.д.</li> <li>3. Сопоставить элементы списка 1 с элементами списка 2, сформировать пары элементов.</li> <li>4. Записать попарно буквы и цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа (например, А1 или Б4).</li> </ol>	Ответ считается верным, если правильно указаны цифры или буквы
Задание закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов из нескольких вариантов предложенных	Прочитайте текст, выберите правильные ответы	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается несколько правильных ответов из предложенных вариантов.</li> <li>2. Внимательно прочитать предложенные варианты-ты ответа.</li> <li>3. Выбрать несколько правильных ответов.</li> <li>4. Записать только номера (или буквы) выбранного варианта ответа (например, 1 4 или А Г).</li> </ol>	Ответ считается верным, если правильно установлены все соответствия (позиции из одного столбца верно сопоставлены с позициями другого)
Задание закрытого типа на установление последовательности	Прочитайте текст и установите последовательность	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается последовательность элементов.</li> </ol>	Ответ считается верным, если правильно указана вся последовательность цифр

		<p>2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.</p> <p>3. Построить верную последовательность из предложенных элементов.</p> <p>4. Записать буквы/цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа в нужной последовательности (например, БАВ или 135).</p>	
<p>Задание комбинированного типа с выбором одного правильного ответа из предложенных и обоснованием выбора</p>	<p>Прочитайте текст, выберите правильный ответ и запишите аргументы, обосновывающие выбор ответа</p>	<p>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.</p> <p>2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.</p> <p>3. Выбрать один верный ответ.</p> <p>4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа.</p> <p>5. Записать аргументы, обосновывающие выбор ответа (например, 4 текст обоснования).</p>	<p>Ответ считается верным, если правильно указана цифра или буква и приведены корректные аргументы, используемые при выборе ответа</p>
<p>Задание открытого типа с развернутым ответом</p>	<p>Прочитайте текст и запишите развернутый обоснованный ответ</p>	<p>1. Внимательно прочитать текст задания и понять суть вопроса.</p> <p>2. Продумать логику и полноту ответа.</p> <p>3. Записать ответ, используя четкие компактные формулировки.</p> <p>4. В случае расчетной задачи, записать решение и ответ</p>	<p>Ответ считается верным:</p> <p>1. Отсутствие фактических ошибок.</p> <p>2. Раскрытие объема используемых понятий (полнота ответа).</p> <p>3. Обоснованность ответа (наличие аргументов).</p> <p>4. Логическая последовательность излагаемого материала.</p>

#### 4.5. Общая шкала оценивания результатов текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением БРС

Итоговая балльная оценка	Традиционная система	Бинарная система	ECTS	
			Для традиционной системы	Для бинарной системы
95-100	Отлично	Зачтено	A	P/ Passed
85-94			B	P/ Passed
75-84	Хорошо		C	P/ Passed
65-74			D	P/ Passed
55-64	Удовлетворительно		E	P/ Passed
0-54	Неудовлетворительно		Не зачтено	F

Соотношение баллов за текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию, а также повторную промежуточную аттестацию:

Максимальная сумма баллов за текущий контроль успеваемости	Максимальная сумма баллов за промежуточную аттестацию	Максимальная итоговая балльная оценка	Максимальная сумма баллов за повторную промежуточную аттестацию
60 баллов	40 баллов	100 баллов	100 баллов

#### 5. Формы аттестации, типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся, критерии и шкалы оценивания по контрольным точкам

5.1. В ходе реализации дисциплины Б1.О.07.04 «Дифференциальные и разностные уравнения» используются следующие формы текущего контроля успеваемости обучающихся (в том числе, задания к контрольным точкам):

Письменный опрос, тестирование, контрольная работа.

##### Тема 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка (ДУ-1).

Контрольная работа:

##### Вариант № 1

1. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y' = \frac{y-2}{x+3}, y(1) = 2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = y'$$

2. Найти общее решение:

3. Найти общее решение:  $y' + 2y = 0$ .

4. Найти общее решение:  $\operatorname{tg}x dx + \frac{dy}{y} = 0$ .
5. Найти общее решение:  $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0$ .

### Вариант № 2

1. Найти общее решение:  $(4x^3 + 6xy^2)dx + (6x^2y + e^y)dy = 0$
2. Найти общее решение:  $2yy' = 1$ ;
3. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию:  
 $\frac{dy}{dx} = 2(y - 3)$  , если  $y(0) = 4$ .
4. Найти общее решение:  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ ;
5. Найти общее решение:  $xy' = 1 + y$ ;

#### Вопросы для опроса:

*Вопрос 1* Какая экономическая модель описывается дифференциальным уравнением вида  $\frac{dK}{dt} = sY - \delta K$ ?

*Вопрос 2* Что такое дифференциальное уравнение первого порядка?

*Вопрос 3* Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения первого порядка?

## Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

### Контрольная работа:

#### Вариант № 1

1. Найти общее решение:  $y''' + 5y'' + 4y' = 0$ .
2. Найти общее решение:  $y'' - 2y' = 2x - 8$ .
3. Найти общее решение:  $y'' + 4y' + 5y = 40 \cos 3x$ .
4. Найти общее решение:  $y'' - 6y' + 8y = 0$ .
5. Найти частное решение:  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y'(0) = -2$ .
6. Найти общее решение:  $y^{IV} = e^x$ .

#### Вариант № 2

1. Найти общее решение:  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .
2. Найти общее решение:  $y'' = e^{-x}$ .
3. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию:  
 $y'' - 3y' + 2y = 0$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y'(0) = -2$ .
4. Найти общее решение:  $y'' + 9y' + 20y = 0$

5. Найти частное решение:  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ;  $y(0) = 1$ ;  $y'(0) = 0$ .

6. Найти общее решение:  $y''' = 8e^{2x} + 120x^3$ .

Вопросы для опроса:

*Вопрос 1* Составьте характеристическое уравнение для дифференциального уравнения  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ?

*Вопрос 2* Какой вид имеет общее решение уравнения  $y'' + 4y = 0$ ?

*Вопрос 3* Как целесообразно частное решение искать для уравнения  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ ?

*Вопрос 4* Объясните, почему при совпадении частоты внешнего воздействия с собственной частотой линейной колебательной системы возникает резонанс. Как это отражается на виде частного решения?

*Вопрос 5* В чём состоит принципиальное отличие между методом неопределённых коэффициентов и методом вариации постоянных при решении неоднородных уравнений?

**Тема 3. Системы дифференциальных уравнений (СДУ).**

Контрольная работа:

**Вариант № 1**

1. Методом исключения найти общее решение системы ( $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ ):

$$\begin{cases} y' = 1 + 4x - 2y - 4z, \\ z' = \frac{3}{2}x^2 - y + z. \end{cases}$$

2. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$

3. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 4x - y + t^2. \end{cases}$

**Вариант № 2**

1. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y. \end{cases}$

2. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

3. Найти общее решение системы:  $\begin{cases} x' = 2x + y + \sin t, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$

**Тема 4. Качественные методы теории дифференциальных уравнений.**

Контрольная работа:

**Вариант № 1**

1. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases}$ ;

2. Определить тип особой точки и нарисовать траекторию на плоскости  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x - 4, \\ \dot{y} = 3y - x; \end{cases}$$

3. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

4. Какой фазовый портрет соответствует уравнению  $y'' + 5y' + 6y = 0$  ?

## Вариант № 2

1. Исследовать на устойчивость точку покоя  $x=0, y=0$  системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y - \operatorname{tg} x. \end{cases};$$

2. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5 - 2x - 2y), \\ \dot{y} = e^{xy} - 1 \end{cases};$$

3. Найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:  $\begin{cases} \dot{x} = y + x \\ \dot{y} = x^2 + y \end{cases}$ .

4. Какой фазовый портрет соответствует уравнению  $y'' + 2y' + y = 0$  ?

### Вопросы для опроса:

*Вопрос 1* В чём принципиальное различие между диссипативными и консервативными динамическими системами? Приведите пример каждой из них и объясните, как это различие проявляется в поведении траекторий на фазовой плоскости.

*Вопрос 2* Что такое бифуркация положения равновесия? Опишите на примере (например, уравнения  $x' = \mu - x^2$ ) типичную бифуркацию (седло-узел). Как изменяется количество и устойчивость равновесий при прохождении бифуркационного значения параметра  $\mu$  ?

*Вопрос 3* В модели «утечки мозгов» предполагается, что отток квалифицированных кадров зависит от разницы в уровне доходов между страной и «центром притяжения». Покажите, как при определённых значениях параметров (например, уровня инвестиций в образование или зарплата внутри страны) система может претерпеть бифуркацию, ведущую к резкому изменению численности специалистов. Какие меры политики могут предотвратить «катастрофу»?

*Вопрос 4* Может ли устойчивое положение равновесия стать неустойчивым без изменения структуры уравнения, а только за счёт изменения параметра? Если да – как это явление называется и как его анализировать?

## Тема 5. Примеры дифференциальных динамических моделей.

### Тестовые задания:

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа

ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).

1. Какое уравнение лежит в основе простейшей динамической модели Кейнса (модели акселератора-мультипликатора)?

А)  $\dot{Y}(t) = sY(t) - \delta K(t)$

В)  $\ddot{Y}(t) + a\dot{Y}(t) + bY(t) = c$

С)  $\dot{K}(t) = I(t), I(t) = v\dot{Y}(t)$

Д)  $\dot{Y}(t) = \alpha(C(t) + I(t) - Y(t))$

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или С).

2. В неоклассической модели экономического роста (модели Солоу) основное дифференциальное уравнение описывает динамику:

А) Потребления на душу населения;

В) Капитала на единицу эффективного труда;

С) Темпа роста ВВП;

Д) Процентной ставки.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.

2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.

4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 2 или В).

3. Какую роль играет норма сбережения  $s$  в модели Солоу?

А) Определяет темп роста ВВП в долгосрочном периоде;

В) Влияет на уровень дохода в устойчивом состоянии, но не на его темп роста;

С) Полностью определяет потребление в краткосрочном периоде;

Д) Является экзогенной переменной только в кейнсианских моделях.

Вопросы для опроса:

*Вопрос 1* Какие экономические гипотезы лежат в основе динамической модели Кейнса с акселератором? Почему эта модель может порождать колебания или неустойчивость в экономике?

*Вопрос 2* Сравните краткосрочную динамику в модели Кейнса и долгосроч-

ную динамику в модели Солоу. В чём принципиальное различие между их подходами к объяснению экономического роста?

*Вопрос 3* Как изменится поведение модели Солоу, если производственная функция будет обладать возрастающей отдачей от масштаба (например,  $Y=K^{\alpha}L^{\beta}$  с  $\alpha+\beta>1$ )? Возможен ли в этом случае устойчивый рост без экзогенного технологического прогресса?

### **Тема 6. Разностные уравнения.**

#### Тестовые задания:

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответов.
3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).

1. Чем отличается задача Коши для разностного уравнения второго порядка от уравнения первого порядка?

- А) Числом начальных условий;
- В) Формой уравнения;
- С) Областью определения;
- Д) Наличием производных.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответов.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или С).
2. Какой вид имеет частное решение уравнения  $x_{t+2}-3x_t+1+2x_t=3^t$  ?  
А)  $A \cdot 3^t$ ; В)  $A \cdot t \cdot 3^t$ ; С)  $A \cdot t^2$ ; Д)  $A \cdot \sin(3t)$ .

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответов.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 2 или В).
3. Что представляет собой общее решение линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка?  
А) Сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

- и частного решения неоднородного;
- В) Только частное решение;
- С) Только общее решение однородного уравнения;
- Д) Произвольная функция.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).
4. Если характеристическое уравнение имеет кратные корни  $r_1=r_2=r$ , то каково общее решение?
- А)  $x_t=C_1r^t+C_2r^t$ ; В)  $x_t=(C_1+C_2t)r^t$ ; С)  $x_t=C_1r^t$ ; Д)  $x_t=C_1r^t+C_2t$ .

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).
5. Что означает «лагирование» в контексте разностных уравнений?
- А) Увеличение порядка уравнения.  
 В) Сдвиг последовательности назад во времени:  $L(x_t)=x_{t-1}$ .  
 С) Применение логарифмического преобразования к переменным.  
 Д) Задержка в вычислении решения при численном моделировании.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).
5. Какой оператор соответствует «дискретному дифференцированию» (первой разности) последовательности  $x_n$  ?
- А)  $\nabla x_n=x_n-x_{n-1}$   
 В)  $\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$   
 С)  $Lx_n=x_{n-1}$   
 Д) Оба варианта А и В

Контрольная работа:

**Вариант № 1**

1. Найти общее решение:  $y^{(k+2)} + y^{(k+1)} - 2y^{(k)} = 0$ .
2. Найти общее решение:  $y^{(k+2)} - y^{(k)} = \cos k$ .
3. Найти частное решение:  $y^{(k+2)} - 9y^{(k+1)} + 20y^{(k)} = \cos k - 2^k$ ,  $y(1) = y(2) = 0$ .

### Вариант № 2

1. Найти общее решение:  $y^{(k+2)} - 5y^{(k+1)} + y^{(k)} = 0$ .
2. Найти общее решение:  $y^{(k+2)} - 10y^{(k+1)} + 26y^{(k)} = -2\sin 3k - 2 \cdot 3^k$
3. Найти частное решение:  $y^{(k+2)} - 5y^{(k+1)} + 4y^{(k)} = 2\cos 3k - 5^k$ ,  
 $y(2) = y(3) = 0$ .

### Тема 7. Системы линейных разностных уравнений.

#### Тестовые задания:

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).
1. Можно ли использовать метод неопределённых коэффициентов для систем разностных уравнений?
- А) Да, если правая часть имеет специальный вид;
  - В) Нет, только для скалярных уравнений;
  - С) Только для уравнений второго порядка;
  - Д) Только для дифференциальных уравнений.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
  2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.
  3. Выбрать один верный ответ.
  4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или С).
2. Что представляет собой матрица системы в системе разностных уравнений?
- А) Матрица начальных условий;
  - В) Матрица коэффициентов при неизвестных;
  - С) Матрица правых частей;
  - Д) Матрица перехода к новому базису.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.

3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 2 или В).
3. Какова структура общего решения линейной неоднородной системы?
  - А) Только частное решение;
  - В) Только общее решение однородной части;
  - С) Сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной;
  - Д) Произведение двух решений.

Контрольная работа:

**Вариант № 1**

1. Найти общее решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = -6x(k) + 8y(k), \\ y(k+1) = -4x(k) + 6y(k). \end{cases}$$
2. Найти общее решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = -2x(k) - y(k) + 7k - 1, \\ y(k+1) = -4x(k) - 5y(k) + 2. \end{cases}$$
3. Найти частное решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = 3x(k) + y(k) + 2k + 2, \\ y(k+1) = 2x(k) + 4y(k) + 2k + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

**Вариант № 2**

1. Найти общее решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = -2x(k) + 7y(k) + 5 \cos k + 2k + 1, \\ y(k+1) = -x(k) + 2y(k) + 4 \cdot 7^k. \end{cases}$$
2. Найти общее решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = -5x(k) + 2y(k), \\ y(k+1) = 2x(k) + 1y(k). \end{cases}$$
3. Найти частное решение: 
$$\begin{cases} x(k+1) = 3x(k) - 8y(k) + 3^{k+1}, \\ y(k+1) = 6x(k) - y(k) + \cos k - 3k, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

**Тема 8. Количественный и качественный анализ стационарных систем разностных уравнений.**

Тестовые задания:

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.
3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 1 или А).
1. Что означает устойчивость нулевого решения системы разностных уравнений?
  - А) Все решения остаются ограниченными;
  - В) Все решения стремятся к бесконечности;

- C) Все решения стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ ;
- D) Существует хотя бы одно ограниченное решение.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные вариант-ты ответа.
3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или C).

**2.** Какой критерий используется для исследования устойчивости линейной однородной системы с постоянными коэффициентами?

- A) По модулю собственных значений матрицы;
- B) По определителю матрицы;
- C) По рангу матрицы;
- D) По следу матрицы.

*Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных.*

1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов.
2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.
3. Выбрать один верный ответ.
4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 2 или B).

**3.** Если хотя бы одно собственное значение матрицы  $A$  имеет модуль больше 1, то каким будет поведение решений?

- A) Устойчивое;
- B) Асимптотически устойчивое;
- C) Неустойчивое;
- D) Периодическое.

5.2. Типовые оценочные материалы для текущего контроля успеваемости обучающихся (вне контрольных точек):  
приведены в п.6.2.

**5.3. Один или несколько тематических блоков дисциплины завершаются контрольной точкой (далее – КТ). Текущий контроль успеваемости по дисциплине предусматривает не менее 2 (двух) и не более 10 (десяти) КТ в течение периода освоения дисциплины.**

Максимальное количество баллов за любой тип работ в рамках КТ составляет 100 (сто) баллов.

Распределение весовых коэффициентов по КТ в рамках текущего контроля успеваемости по дисциплине и формулы расчета:

Наименование контрольной точки	Максимальное количество баллов за работу в рамках КТ, которое может набрать обучающийся	Коэффициент веса контрольной точки	Результат контрольной точки, участвующий в формировании итоговой балльной оценки по дисциплине (отражается в журнале БРС в СДО)
<b>КТ 1</b>	<b>100</b>	<b>0,45</b>	<b>45</b>
<b>КТ 2</b>	<b>100</b>	<b>0,15</b>	<b>15</b>
<b>Итого:</b>	<b>x</b>	<b>0,6</b>	<b>60</b>

**Формула расчета результата контрольной точки:**

**Результат контрольной точки = Количество баллов за работу в рамках КТ X Коэффициент веса контрольной точки.**

**5.4. Формы текущего контроля успеваемости обучающихся в рамках КТ и типовые оценочные материалы:**

**КТ – 1.**

**Темы 1-4:**

Контрольная работа,

Письменный опрос.

**КТ-2.**

**Темы 5-8.**

Контрольная работа,

Тестирование,

Письменный опрос.

Для каждой формы текущего контроля успеваемости обучающихся в рамках КТ определены критерии оценивания результатов выполнения задания.

*1. Критерии оценивания тестирования:*

Критерии оценки	Диапазон баллов	Описание критерия
<i>Количество пра-</i>	<i>0</i>	<i>Количество правильных ответов ме-</i>

<i>вильных ответов</i>		<i>нее 55%</i>
	25	<i>Количество правильных ответов от 55% до 64%</i>
	50	<i>Количество правильных ответов от 65% до 74%</i>
	75	<i>Количество правильных ответов от 75% до 84%</i>
	100	<i>Количество правильных ответов от 85% до 100%</i>
Итого максимально:	100	

### 2. Критерии оценивания контрольной работы:

Критерии оценки	Диапазон баллов	Описание критерия
<i>Содержание и раскрытие выбранных понятий</i>	41-70	<i>Детальное, последовательное описание хода решений примера</i>
	21-40	<i>Поверхностное описание хода решений примера</i>
	0-20	<i>Понятия раскрыты минимально или не раскрыты вовсе Не представлен/ представлен минимальный ход решения примера</i>
<i>Количество выполненных заданий</i>	30	<i>Количество выполненных заданий от 85% до 100%</i>
	15	<i>Количество выполненных заданий от 55% до 84%</i>
	0	<i>Количество выполненных заданий менее 55%</i>
Итого максимально:	100	

### 3. Критерии оценивания письменного опроса:

Диапазон баллов	Описание критерия
85-100	Обучающийся полно излагает материал (отвечает на вопрос), дает правильное определение основных понятий; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные; излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
65-84	Обучающийся дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «отлично», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета

	в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
55-64	Обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
0-54	Обучающийся обнаруживает незнание вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал.

5.5. Описание дополнительных материалов и оборудования, необходимых для выполнения проверочных заданий (*при необходимости*).

Для решения тестовых заданий студенту разрешается использование калькулятора; программ для работы с электронными таблицами для обработки, анализа и визуализации данных.

## **6. Формы промежуточной аттестации, критерии и шкала оценивания, типовые оценочные материалы по дисциплине**

6.1. Промежуточная аттестация проводится в форме **зачета**.

Зачет проходит в форме устного собеседования по одному теоретическому вопросу и выполнения практического задания. На подготовку к ответу дается 45 минут.

При реализации промежуточной аттестации в ЭО/ДОТ могут быть использованы следующие формы: устно в ДОТ - в форме обоснованных ответов на задания различного типа; письменно в СДО - в форме письменного решения заданий различного типа; тестирование в СДО.

6.2. Типовые оценочные материалы промежуточной аттестации.

### Вопросы для подготовки к зачету.

1. Дать определение динамической системы и обыкновенного дифференциального уравнения. Характеризовать решение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Дать определение решения дифференциального уравнения с начальными условиями. (Задача Коши).
3. Привести примеры динамических систем, описываемых обыкновенным

дифференциальным уравнением первого порядка: накопление капитала, инфляция, размножение бактерий, распад радиоактивного вещества, распространение эпидемий и наркомании, простейшая модель народонаселения.

4. Доказать и обсудить теорему существования и единственности обыкновенного дифференциального уравнения. Привести пример использования теоремы для доказательства общности решения линейного уравнения.

5. Дать геометрическую интерпретацию решения обыкновенного дифференциального уравнения. Дать определения фазового пространства, векторного поля скоростей изменения состояния, расширенного фазового пространства.

6. Рассмотреть и продемонстрировать на примерах методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения, интегрируемые в квадратурах. Привести пример дифференциального уравнения неинтегрируемого в квадратурах.

7. Рассмотреть методы интегрирования уравнения в полных дифференциалах.

8. Рассмотреть методы интегрирования уравнения с разделяющимися переменными.

9. Рассмотреть методы интегрирования однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка.

10. Описать и продемонстрировать на примере организацию интегрирования неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка.

11. Дать определение, описать и продемонстрировать решение уравнения Я.Бернулли.

12. Описать общие сведения о линейных уравнениях высшего порядка.

13. Описать свойства комплексных чисел. Формула Эйлера. Основная теорема алгебры.

14. Дать определение однородных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеризовать общие свойства решений линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка.

15. Описать и продемонстрировать метод Эйлера интегрирования дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Дать определение характеристического уравнения. Привести общее решение в случае простых вещественных корней характеристического уравнения.

16. Объяснить и продемонстрировать общее решение однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами в случае простых комплексных корней характеристического уравнения.

17. Объяснить и продемонстрировать общее решение однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных вещественных корней характеристического уравнения.
18. Объяснить общее решение однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных комплексных корней характеристического уравнения.
19. Дать определение неоднородных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Привести общее решение и частное решение для правой части вида  $f(t)e^{at}$ , где  $f(t)$  – многочлен, методом неопределенных коэффициентов.
20. Дать определение неоднородных линейных дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Описать организацию построения общего решения и частного решения для правой части вида  $e^{at} * (f(t) * \cos(bt) + g(t) * \sin(bt))$ , где  $f(t), g(t)$  – многочлены, методом неопределенных коэффициентов.
21. Рассмотреть и продемонстрировать метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для построения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
22. Дать определение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, положения равновесия, точки покоя
23. Привести пример системы дифференциальных уравнений, описывающей отношения «хищник-жертва».
24. Характеризовать модели Лотки-Вольтерра. Привести примеры.
25. Дать определение структурной устойчивости решений системы дифференциальных уравнений.
26. Дать геометрическую интерпретацию решения однородного дифференциального уравнения второго порядка на фазовой плоскости. Дать определение фазового портрета дифференциального уравнения второго порядка: седло, узел, фокус. Дать определение устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Сформулировать достаточное условие устойчивости положения равновесия.
27. Дать определение понятия устойчивости и неустойчивости положения равновесия однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. Сформулировать достаточное условие устойчивости положения равновесия однородного линейного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами

28. Объяснить понятие устойчивости, понятие диссипативных и консервативных систем.
29. Сделать обзор численных методов решения дифференциальных уравнений. Характеризовать способ Эйлера – Коши. Привести геометрическую интерпретацию метода.
30. Дать определение дифференциальных динамических моделей.
31. Дать определение и привести ланчестерские модели.
32. Характеризовать качественные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотреть элементы теории бифуркации динамических систем, элементы теории катастроф.
33. Дать определение бифуркации положений равновесия динамической системы. Привести пример: модель рыболовства, модель «утечки мозгов». Обсудить перспективы использования теории катастроф.
34. Классифицировать бифуркации.
35. Привести примеры модели равновесия.
36. Характеризовать динамические модели Кейнса.
37. Характеризовать неоклассическую модель роста.
38. Характеризовать модель Солоу.
39. Характеризовать модель динамики производства с нелинейными производственными функциями.
40. Дать определение разностного уравнения.
41. Дать определение системы разностных уравнений.
42. Объяснить дискретное дифференцирование.
43. Объяснить понятие лагирования. Привести примеры модели распределенной авторегрессии.
44. Привести примеры решения разностных уравнений.
45. Сделать обзор организации решения разностных уравнений с помощью пакетов математического моделирования.
46. Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия).
47. Решение подстановкой.
48. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение).
49. Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
50. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения.
51. Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы.

52. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных стационарных систем разностных уравнений.

Типовые задания для зачета

1. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y' = \frac{y-2}{x+3}, y(1) = 2$$

2. Решить разностное линейное уравнение первого порядка:

$$y(k+1) = \frac{k+2}{k+1}y(k) + \frac{2}{k+3}$$

3. Исследовать устойчивость положений равновесия нелинейных систем разностных уравнений:  $\hat{i}$

4. Методом исключения найти общее решение системы ( $y = y(x), z = z(x)$ ):

$$\begin{cases} y' = 1 + 4x - 2y - 4z, \\ z' = \frac{3}{2}x^2 - y + z. \end{cases}$$

5. Решить линейное разностное стационарное уравнение первого порядка:

$$y(k+1) + 2y(k) = 3k^2 + 2k - 2$$

6. Решить линейную однородную стационарную систему разностных уравнений второго порядка:  $\begin{cases} x(k+1) = -6x(k) + 8y(k), \\ y(k+1) = -4x(k) + 6y(k). \end{cases}$

Типовые проверочные задания для самоподготовки обучающегося к промежуточной аттестации:

ТИП ЗАДАНИЯ	СЦЕНАРИИ ВЫПОЛНЕНИЯ	ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ
Задание закрытого типа с выбором одного правильного ответа из нескольких вариантов предложенных	1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов. 2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа. 3. Выбрать один верный ответ. 4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа (например, 3 или B).	1. Какой вид имеет общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$ ? A) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ; B) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ ; C) $y = C_1 + C_2 x$ ; D) $y = C_1 e^{4x} + C_2$ .
		2. Какие из перечисленных уравнений являются уравнениями с разделяющимися переменными? A) $y' = x + y$ ; B) $y' = xy$ ; C) $y' = \frac{x}{y}$ ; D) $y' + y = e^x$ .
Задание закрытого типа на установление соответствия	1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидаются пары элементов.	1. Установить взаимно однозначное соответствие между понятием и формулой

	<p>2. Внимательно прочитать оба списка: список 1 – вопросы, утверждения, факты, понятия и т.д.; список 2 – утверждения, свойства объектов и т.д.</p> <p>3. Сопоставить элементы списка 1 с элементами списка 2, сформировать пары элементов.</p> <p>4. Записать попарно буквы и цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа (например, А1 или Б4).</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Формула</th> <th>Тип интеграла</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>А) <math>y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)</math></td> <td>1) Уравнение в полных дифференциалах</td> </tr> <tr> <td>В) <math>M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0</math></td> <td>2) Линейное разностное уравнение первого порядка</td> </tr> <tr> <td>С) <math>y(x + 1) - ay(x) = 0</math></td> <td>3) Линейное дифференциальное уравнение второго порядка</td> </tr> </tbody> </table>	Формула	Тип интеграла	А) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$	1) Уравнение в полных дифференциалах	В) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	2) Линейное разностное уравнение первого порядка	С) $y(x + 1) - ay(x) = 0$	3) Линейное дифференциальное уравнение второго порядка
Формула	Тип интеграла									
А) $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$	1) Уравнение в полных дифференциалах									
В) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	2) Линейное разностное уравнение первого порядка									
С) $y(x + 1) - ay(x) = 0$	3) Линейное дифференциальное уравнение второго порядка									
<p>Задание закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов из нескольких вариантов предложенных</p>	<p>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается несколько правильных ответов из предложенных вариантов.</p> <p>2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.</p> <p>3. Выбрать несколько правильных ответов.</p> <p>4. Записать только номера (или буквы) выбранного варианта ответа (например, 1 4 или А Г).</p>	<p>2. Установите соответствие между формулой и результатом:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Формула</th> <th>Результат</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>А) <math>\frac{dy}{dx} = 2xy</math></td> <td><math>-\ln(C - e^x),</math> <math>C &gt; e^x</math></td> </tr> <tr> <td>В) <math>\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}</math></td> <td><math>Ce^{x^2}</math></td> </tr> <tr> <td>С) <math>\frac{dy}{dx} = e^{x+y}</math></td> <td><math>\pm\sqrt{x^2+C},</math> <math>x^2+C \geq 0</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>1. Для решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами могут применяться следующие методы:</p> <p>А) Приведение к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.</p> <p>В) Метод собственных значений и собственных векторов матрицы коэффициентов.</p> <p>С) Матричная экспонента <math>e^{At}</math>.</p> <p>Д) Метод разделения переменных.</p> <p>Е) Метод вариации постоянных.</p> <p>2. Для неоднородных систем дифференциальных уравнений справедливы следующие утверждения:</p> <p>1) Общее решение равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и одного частного решения неоднородной системы;</p>	Формула	Результат	А) $\frac{dy}{dx} = 2xy$	$-\ln(C - e^x),$ $C > e^x$	В) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$Ce^{x^2}$	С) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$	$\pm\sqrt{x^2+C},$ $x^2+C \geq 0$
Формула	Результат									
А) $\frac{dy}{dx} = 2xy$	$-\ln(C - e^x),$ $C > e^x$									
В) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$Ce^{x^2}$									
С) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$	$\pm\sqrt{x^2+C},$ $x^2+C \geq 0$									

		<p>2) Метод вариации постоянных позволяет найти частное решение, если известна фундаментальная матрица однородной системы;</p> <p>3) Все решения неоднородной системы образуют векторное пространство;</p> <p>4) Если <math>f(t) \equiv 0</math>, система становится однородной.</p>
<p>Задание закрытого типа на установление последовательности</p>	<p>1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается последовательность элементов.</p> <p>2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа.</p> <p>3. Построить верную последовательность из предложенных элементов.</p> <p>4. Записать буквы/цифры (в зависимости от задания) вариантов ответа в нужной последовательности (например, БВА или 135).</p>	<p>1. Укажите последовательность действий при решении дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:</p> <p>А) Проинтегрировать обе части полученного равенства.</p> <p>В) Выразить производную в виде <math>\frac{dy}{dx}</math>.</p> <p>С) Перенести все множители, содержащие <math>y</math>, в левую часть, а содержащие <math>x</math> – в правую (разделить переменные).</p> <p>Д) Записать общее решение (в явной или неявной форме), включая произвольную постоянную.</p> <p>Е) Проверить, не потеряны ли решения при делении на выражение, содержащее <math>y</math> (например, <math>y=0</math>).</p> <p>2. Укажите последовательность действий при решении однородной линейной системы разностных уравнений вида <math>x_{n+1} = Ax_n</math>, где <math>A</math> – постоянная квадратная матрица:</p> <p>А. Найти собственные векторы, соответствующие каждому собственному значению.</p> <p>В. Записать общее решение системы в виде линейной комбинации фундаментальных решений.</p> <p>С. Составить характеристическое уравнение <math>\det(A - \lambda I) = 0</math>.</p> <p>Д. Найти все собственные значения матрицы <math>A</math>.</p>

		Е. Для каждого собственного значения построить соответствующее фундаментальное решение вида $\lambda^n v$
Задание комбинированного типа с выбором одного правильного ответа из предложенных и обоснованием выбора	1. Внимательно прочитать текст задания и понять, что в качестве ответа ожидается только один из предложенных вариантов. 2. Внимательно прочитать предложенные варианты ответа. 3. Выбрать один верный ответ. 4. Записать только номер (или букву) выбранного варианта ответа. 5. Записать аргументы, обосновывающие выбор ответа (например, 4 текст обоснования).	1. Определить тип положения равновесия для автономной системы дифференциальных уравнений, матрица Якоби которой имеет собственные значения $\lambda_1 = 2 + i$ , $\lambda_2 = 2 - i$ . Обоснуйте свой выбор.
		2. Исследовать на устойчивость положение равновесия системы $x_{n+1} = Ax_n$ , собственные значения матрицы которой равны $\lambda_1 = 0,8$ и $\lambda_2 = -1,1$ .
Задание открытого типа с развернутым ответом	1. Внимательно прочитать текст задания и понять суть вопроса. 2. Продумать логику и полноту ответа. 3. Записать ответ, используя четкие компактные формулировки. 4. В случае расчетной задачи, записать решение и ответ	Приведите полное решение примера: 1. Решить уравнение: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos y}$ 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x' = xy \\ y' = x + y \end{cases}$

### 6.3. Критерии и шкала оценивания на основе БРС.

*Критерии и балльная шкала определяются преподавателем*

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ	РЕЗУЛЬТАТ В БАЛЛАХ
Дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, самостоятельно, и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса, решил предложенные практические задания без ошибок	40
Дан развернутый ответ на поставленный вопрос, где обучающийся демонстрирует знания, приобретенные на лекционных и семинарских занятиях, а также полученные посредством изучения обязательных учебных материалов по курсу, дает аргументированные ответы, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логич-	30-39

ность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе. Решил предложенные практические задания с небольшими неточностями.	
Дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа. Допускается несколько ошибок в содержании ответа и решении практических заданий.	20-29
Дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Выводы поверхностны. Решение практических заданий не выполнено, т.е. обучающийся не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.	0-19

6.4. Описание дополнительных материалов и оборудования, необходимых для выполнения проверочных заданий (*при необходимости*).

Для решения задач открытого типа (контрольных работ), тестовых заданий студенту разрешается использование калькулятора; программ для работы с электронными таблицами для обработки, анализа и визуализации данных.

## 7. Методические материалы по освоению дисциплины (модуля)

Для изучения основных вопросов образовательной программы необходимо конспектировать материалы лекций, работать с рекомендованной преподавателем литературой, а также ресурсами информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». Для приобретения навыков активного использования знаний полезно обсуждать плановые и возникающие вопросы, а также решаемые задачи на практических занятиях.

Для закрепления изученного материала даны вопросы по каждой теме дисциплины, на которые следует самостоятельно найти ответы.

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия проводятся главным образом по дисциплинам, требующим закрепления навыков решения задач, и помогают студентам глубже усвоить учебный материал, приобрести умения применять методы математического анализа к решению разнообразных задач, определять и оценивать ресурсы и существующие ограничения разного рода проектов. Практические занятия предназначены для самостоятельной работы студентов

по решению конкретных задач. Каждое практическое занятие сопровождается домашними заданиями, выдаваемыми студентам для решения во внеаудиторное время.

При подготовке к практическим занятиям необходимо проанализировать конспект лекции, ознакомиться с рекомендованной литературой по соответствующей теме, осуществить подготовку по рекомендованным в рабочей программе вопросам для обсуждения темы, выполнить домашнее задание (при необходимости).

Необходимо помнить, что на лекции обычно рассматривается не весь материал, а только его часть. Остальная его часть восполняется в процессе самостоятельной работы. В связи с этим работа с рекомендованной литературой обязательна. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов. В процессе этой работы студент должен стремиться понять и запомнить основные положения рассматриваемого материала, примеры, поясняющие его, а также разобраться в иллюстративном материале. В процессе подготовки к занятиям рекомендуется взаимное обсуждение материала, во время которого закрепляются знания, а также приобретает практика в изложении и разъяснении полученных знаний, развивается речь. При необходимости следует обращаться за консультацией к преподавателю (в том числе по электронной почте). Планируя консультацию, необходимо хорошо продумать вопросы, которые требуют разъяснения. Заканчивать подготовку следует составлением плана (конспекта) по изучаемому материалу (вопросу). Это позволяет составить концентрированное, сжатое представление по изучаемым вопросам. Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику. Кроме того, ведение записей способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивидуальный фонд методических материалов для быстрого повторения изученных вопросов, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятельной работе.

После изучения базовых тем курса проводится текущий контроль знаний студентов в виде опроса или письменного тестирования. Типовые тесты и задания по темам дисциплины приведены в специальном разделе данной рабочей программы.

Подготовка к текущему и промежуточному контролю предполагает изучение представленных вопросов к зачету, работу над тестами, представленными в данной рабочей программе, выполнение семестровой проектной работы по применению системного подхода и методов системного анализа к выбранной системе.

## 8. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет

### 8.1. Основная литература

1. Гордин, В. А. Дифференциальные и разностные уравнения: Какие явления они описывают и как их решать : учебное пособие / В. А. Гордин. — Москва : Высшая школа экономики, 2016. — 531 с. — ISBN 978-5-7598-1094-0.— Текст: электронный// Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/100139> (дата обращения: 17.07.2021)

2. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 280 с. — ISBN 978-5-8114-6795-2.— Текст : электронный// Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152452>

3. Жукова, Г. С. Дифференциальные уравнения: учебник / Г. С. Жукова. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 504 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015970-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1072180>

4. Осадчий, Ю. М. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / Ю.М. Осадчий. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 157 с. - ISBN 978-5-16-107965-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1039633>  
Все источники основной литературы взаимозаменяемы.

### 8.2. Дополнительная литература

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие, рек. М-вом образования Рос. Федерации / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. - изд. 16-е, стер. - СПб.[и др.] : Лань, 2010. - 736 с.

2. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов : учеб. пособие / Г. С. Бараненков [и др.] ; под ред. Б. П. Демидовича. - М. : АСТ [и др.] ; Владимир : ВКТ, 2010. - 495 с.

3. Минюк С. А. Дифференциальные уравнения и экономические модели : учеб. пособие для вузов / С. А. Минюк, Н. С. Берёзкина. - Минск : Высшэйшая школа, 2007. - 141 с.

4. Практикум по математике : I курс : [учеб. пособие] / [сост. А. Л. Кириллов, В. И. Клоков, С. В. Полянская]. - СПб. : Изд-во СЗАГС, 2009. - 99 с.

5. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа / К. Н. Лунгу [и др.]. - 9-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2011. - 575 с.

6. Кириллов А. Л. Введение в математический анализ элементарных функций : [учеб. пособие] / А. Л. Кириллов. - СПб. : Изд-во СЗАГС, 2008. - 175 с.

7. Клоков В. И. Инвестиции : учеб. пособие / В. И. Клоков. - СПб. :

Изд-во СЗАГС, 2009. - 199 с.

8. Смирнов В. Курс высшей математики: учебник. Том I-IV. - 24-е изд. [Электронный ресурс]. - СПб. : БХВ-Петербург, 2010. - 848 с.

9. Чесноков Е. А. Основы математического анализа : учеб. пособие / Е. А. Чесноков. - СПб. : Изд-во СЗАГС, 2010. - 177 с.

### **8.3. Нормативные правовые документы и иная правовая информация**

Не используются

#### **8.4 Интернет-ресурсы**

Обучающимся обеспечен доступ к материалам курса в СДО Академии <http://lms.ranepa.ru>, а так же через сайт научной библиотеки к следующим подписанным электронным ресурсам:

##### ***Русскоязычные ресурсы***

- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*Айбукс*»
- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*Юрайт*»
- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*Лань*»
- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*ZNANI-UM.COM*»
- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*BOOK.RU*»
- Электронные учебники электронно-библиотечной системы (ЭБС) «*IPRSMART*»

### **9. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы**

№ п/п	Наименование
1.	Специализированные залы для проведения лекций, оснащенные персональным компьютером/ноутбуком и мультимедийным проектором
2.	Аудитории и компьютерные классы, оборудованные посадочными местами и персональными компьютерами с выходом в Интернет для проведения практических занятий
3.	«МТС Линк» — российская платформа для онлайн-коммуникаций и совместной работы команд ; «Яндекс Телемост» — сервис для видеоконференций от Яндекса; Я-мессенджер
4.	Технические средства обучения: персональные компьютеры; программные средства, обеспечивающие просмотр видеофайлов в форматах AVI, MPEG-4, DivX, RMVB, WMV; программы для работы с электронными таблицами для обработки, анализа и визуализации данных; соответствующие онлайн-инструменты для построения интеллект-карты и моделей в различных нотациях

5.	Научная библиотека (в т.ч. электронные информационные ресурсы научной библиотеки)
6.	СДО Академии <a href="https://lms.ranepa.ru/">https://lms.ranepa.ru/</a>